Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»
Кафедра вычислительных технологий

Паспорт экзамена

по дисциплине «Математическая физика», 7 семестр

1. Методика оценки

Экзамен проводится в форме письменного тестирования.

Тестовые задания охватывают все содержание «Математическая физика».

Тест состоит из 10 вопросов различного вида и позволяет проверить результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с установленными в программе индикаторами достижения компетенций.

2. Критерии оценки результатов обучения, соотнесенных с уровнями освоения индикаторов достижения компетенций

Выполнение теста засчитывается на **продвинутом** уровне, если студент правильно ответил на все вопросы теста, знает определения всех понятий, продемонстрировал способность безошибочно устанавливать последовательность и соответствие между процессами и явлениями, выявлять проблемы, предлагать механизмы их решения, представляет количественные и качественные характеристики определенных процессов и не допускает ошибок при решении задач. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций не содержит пробелов. Установленные в программе компетенции сформированы в полном объеме. Оценка составляет *от 35 до 40 баллов.*

Выполнение теста засчитывается на **базовом** уровне, если студент правильно ответил на ⅔ вопросов теста, знает определения основных понятий, продемонстрировал способность устанавливать последовательность и соответствие между процессами и явлениями, правильно характеризует процессы, явления, не допускает существенных ошибок при решении задач. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций содержит несущественные пробелы. Установленные в программе компетенции сформированы на базовом уровне. Оценка составляет *от 34 до 27 баллов.*

Выполнение теста засчитывается на **пороговом** уровне, если студент правильно ответил от ½ до ⅔ вопросов теста, знает определения основных понятий, продемонстрировал способность устанавливать последовательность и соответствие между процессами и явлениями, при решении задач допускает непринципиальные ошибки, например, вычислительные. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций содержит пробелы. Установленные в программе компетенции сформированы на пороговом уровне. Оценка составляет *от 26 до 20 баллов.*

Выполнение теста считается **неудовлетворительным**, если студент правильно ответил менее чем на половину вопросов теста, не знает определений понятий, не продемонстрировал способность устанавливать последовательность и соответствие между процессами и явлениями, при решении задач допускает принципиальные ошибки. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций содержит существенные пробелы. Установленные в программе

компетенции не сформированы. Оценка составляет *менее 20 баллов.*

3. Шкала оценки

Экзамен считается сданным, если сумма баллов по всем заданиям билета составляет от 20 до 40 баллов включительно. Сумма менее 20 баллов признается неудовлетворительным результатом промежуточной аттестации по дисциплине.

В общей оценке по дисциплине экзаменационные баллы учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, установленными в НГТУ.

4. Примерный тест для экзамена

Утверждаю:
Зав. кафедрой Выч.технол. Иткина Н.Б.
«____» _____ 20_ г.

Тест

по дисциплине «Математическая физика»[1]

Вопрос1:Определение разностной схемы.
Ответ: Разностная схема – система уравнений, связывающая между собой значения сеточной функции u_i, заданные дополнительные условия, и значение правой части уравнения (1) в узлах сетки.

Если исходное уравнение (1) можно записать в виде:
$Lu = \varphi$ (1)
тогда, соответствующая ему разностная схема:
$L_h u_h = \varphi_h$ (2)
где L_h, u_h - сеточные функции (функции, определённые на узлах сетки), L_h - разностный оператор, его вид определяет систему разностных уравнений.

Вопрос2:Определение сходимости разностной схемы для задачи Коши

Ответ: Будем говорить, что семейство сеточных функций u_h сходится к точному решению y(x) задачи (1), если $Lim\left\|u_h - y(x_h)\right\| = 0$, $h \to 0$

Если, кроме того, существует такой шаг h_0, что для любого $h \le h_0$, выполняется неравенство:
$\left\|u_h - y(x_h)\right\| \le C * h^k$,
где C, k – константы, не зависящие от h. В этом случае будем говорить, что имеет место **сходимость порядка k**.

[1] Правильные ответы выделены жирным шрифтом

Вопрос3:Определение порядка аппроксимации разностной схемы

Ответ: Разностная схема $L_h u_h = \varphi_h$ для задачи $Lu = \varphi$ имеет **порядок аппроксимации k**, если $\|(Lu)_h - L_h u_h\| = O(h^k)$.

Вопрос4:Определение устойчивости разностной схемы

Ответ: Разностная схема $L_h u_h = \varphi_h$ для задачи $Lu = \varphi$ называется **устойчивой**, если существует такая ограниченная константа M, что $\|(u)_h - u_h\| \le \|(f)_h - f_h\|$.

Вопрос5:Требования конформности МКЭ аппроксимаций.

Ответ: Пусть на области $\Omega_h \subset R^n$ определена конечноэлементная сетка $\Xi_{h,p}$. Функция $v : \Omega_h \to R$ принадлежит пространству $H^1(\Omega_K)$ тогда и только тогда, когда:

1. $v|_K \in H^1(K)$ $\forall$ конечного элемента $K \in \Xi_{h,p}$;
2. для любой общей грани $b = \overline{K_i} \cap \overline{K_j}$, $\overline{K_i}, \overline{K_j} \in \Xi_{h,p}$ следы функции $v|_{K_i}$ и $v|_{K_j}$ на грани $b = \overline{K_i} \cap \overline{K_j}$ совпадают.

Вопрос6:Определение конечного элемента

Ответ: Конечным элементом будем называть тройку $\mathrm{K} = \{K, P, \Sigma\}$, где

$K \subseteq R^n$ - ограниченное, замкнутое подпространство, непустое множество с кусочно-гладкой границей; (геометрическое множество элементов);

P - конечномерное пространство функционального пространства, определенного на K, $\dim P = n$; (пространство функций формы);

$\Sigma = \{L_1, L_2, ..., L_n\}$ - базис P^*, сопряженного P пространства – подпространства функциональных форм (линейных функционалов); (пространство степеней свободы);

Базис $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \in P$, дуальный к базису $\Sigma = P^*$, $L_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$ (биортогональный) называется узловым базисом P.

Вопрос7:Метод Галеркина. Несимметричные вариационные формулировки для эллиптических задач.

Ответ: Формулировка несимметричной вариационной проблемы

Пусть выполнены следующие условия:

1) $(H, (\cdot,\cdot))$ - Гильбертово пространство;
2) V - замкнутое подпространство H;
3) $a(\cdot,\cdot)$ - билинейная форма;

4) $a(\cdot,\cdot)$ - непрерывна (ограничена) на V ;

5) $a(\cdot,\cdot)$ - коэрцитивна на V .

Пусть дана $F \in V^*$. Найти $u \in V$ такое, что $a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$.

Аппроксимация Галеркина:

Дано конечномерное подпространство $V_h \subset V$ и $F \in V^*$. Найти $u_h \in V_h$ такое, что: $a(u_h, v) = F(v), \quad \forall v \in V_h$.

Вопрос8:Какая модификация МКЭ наиболее эффективна для решения задач конвекции-диффузии?

Ответ1: МКЭ на базе вариационной постановки Ритца
Ответ2: МКЭ на базе вариационной постановки Галеркина
Ответ3: Стабилизированный МКЭ
Ответ4: МКЭ с базисными функциями высокого порядка

Вопрос9:Какие разностные схемы применяются для аппроксимации одномерной задачи переноса

Ответ1: схема Годунова
***Ответ* 2:**схема Лакса
Ответ3: трехслойная явная схема
Ответ4: трехслойная неявная схема

Вопрос10:Построить дискретный аналог эллиптической задачи в 2-D области на линейных треугольных конечных элементах.

Ответ*:* Стационарная эллиптическая задача:

$-\mathrm{div}(-\lambda \mathrm{grad}(\mathrm{u})) + \sigma \mathrm{u} = \mathrm{f}, \; x \in \Omega$ (1)

с краевыми условиями:

$u = g, x \in \partial\Omega$ (2)

Слабая вариационная постановка для задачи (1), (2) на основе метода Галеркина.

Введем функциональное пространство Соболева H1(Ω),

$$H^1 = \{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in (L^2(\Omega))^2\}$$

Скалярное произведение для элементов пространства L2(Ω) вычисляется следующим образом:

$$(u,v) = \int u(x)v(x)dx$$

Норма для пространств H1(Ω), L2(Ω):

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(u,u)}, \| u \|^2_{H^1(\Omega)} = \| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)}$$

Воспользуемся формулой Грина интегрирования по частям:

$$\int_{\Omega} div(\lambda grad(u))wd\Omega = -\int_{\Omega} \lambda grad(u)grad(w)d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{du}{dn} wd\Gamma \quad , \qquad (3)$$

где $u, w \in H^1(\Omega)$, n - нормаль к границе $\partial\Omega$.

В итоге получим

$Lu = f, x \in \Omega$

$u = 0, x \in d\Omega$

Будем искать решение $u \in H_0^1, f \in (L^2(\Omega))$, удовлетворяющее следующему равенству:

$$\lambda \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma uv d\Omega = \int_{\Omega} fv d\Omega, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Обозначим билинейную форм:

$$b(u,v) = (Lu, v) = \lambda \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega + \sigma \int_{\Omega} uv d\Omega,$$

Тогда можно переписать следующим образом:

$b(u,v) = (f,v), \forall v \in H_0^1$.

Пусть задано некоторое разбиение T_k области Ω на конечные элементы в виде треугольников. Определим конечномерное подпространство V_h пространства $H1(\Omega)$ для вектора неизвестных. Тогда функцию $u^h \in V^h$ можно представить в виде разложениям по базисным функциям пространства V_h:

$$u^h = \sum_{i=1}^{N} u_i^h \psi_i(x), \qquad (4)$$

где u_i^h - коэффициенты приближенного решения uk, N - размерность подпространства Vh.

Добавим тестовые функции $v^h \in V^h$ и получим дискретный аналог вариационной формулировки уравнения конвекции-диффузии- реакции:

$\lambda \int_{\Omega_k} \mathrm{grad}(u^h) \cdot \mathrm{grad}(v^h) d\Omega + \int_{\Omega_k} \sigma u^h v^h d\Omega = \int_{\Omega_k} f^h v^h d\Omega$ (5)

Из (5) диффузионная локальная матрица имеет вид:

$\hat{D}_{ij} = (\nabla \psi_i, \nabla \psi_j)$

Скалярное произведение определено, следовательно исходя из определения grad получается:

$$\hat{D}_{ij} = \int_{\Omega} (\frac{\partial \psi_i}{\partial x}, \frac{\partial \psi_i}{\partial y})(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}, \frac{\partial \psi_j}{\partial y}) d\Omega = \int_{\Omega} (\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y}, \frac{\partial \psi_j}{\partial y}) d\Omega .$$

Функции $\psi_{i,j}, i, j = 1,3$ - базисные функции, определенные на элементе К. Следовательно, получаем выражение для расчета элементов локальной матрицы:

$$\hat{D}_{ij} = \lambda \frac{|\det D|}{2} (\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j)$$

Локальная матрица реакции источника имеет вид:

$\hat{G}_{ij} = \sigma(\psi_i, \psi_j)$

Скалярное произведение определено, следовательно

$$\hat{G}_{ij} = \sigma \int_{\Omega} \psi_i \psi_j d\Omega$$

Функции $\psi_{i,j}, i, j = 1,3$ - базисные функции, определенные на элементе К. Следовательно, получаем определение локальной матрицы:

$$\hat{G}_{ij} = \sigma \frac{|\det D|}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим правую часть выражения для k-го конечного элемента:

$$\int_{\Omega_k} f \psi_i dxdy$$

,

где f представим в виде $f = f_1 L_1 + f_2 L_2 + f_3 L_3$, где f_i - значения в вершинах треугольника. Получим:

$$\int_{\Omega_k} f_q L_q L_i dxdy = f_q \int_{\Omega_k} L_q L_i d\Omega_k$$

Таким образом:

$$R_i = \sum_{q=1}^{3} f_q \int_{\Omega_k} L_q L_i \, d\Omega_k$$

, $i = \overline{0,2}$.

После того, как определены все локальные матрицы, и векторы можно перейти к сборке глобальной матрицы и вектора СЛАУ. Процедура сборки глобальной матрицы на заданной сетке: для каждого узла рассматриваемого конечного элемента сетки находим глобальный номер и к элементу глобальной матрицы с глобальными индексами прибавляем соответствующий элемент локальной матрицы. Глобальные векторы складываются из локальных векторов по тому же принципу. Локальные матрицы и векторы вычисляются на каждом конечном элементе сетки.

Первые краевые условия учитываются непосредственно в матрице дискретного аналога.